

Title	作用素環の束論的研究 (作用素環研究会報告集)
Author(s)	前田, 周一郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1966), 9: 24-42
Issue Date	1966-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/107386
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

作用素環の束論的研究

愛媛大学文理学部 前 田 周 一 郎

ここでは作用素環の束論的研究の中でも, Piron の二つの論文 [28], [29] で取扱われている内容を中心にして述べる。[28] の本文では量子論における system of propositions が如何なる数学的構造をもつものであるかについて述べ, 量子論と Hilbert 空間との結びつきを, この面から正当化することを意図している。ここで用いられる数学的理論の内容は全く束論に属するもので, これを18頁にわたる Appendix にまとめている。次に [29] では system of propositions を基にして von Neumann system の概念 (von Neumann algebra の射影作用素の作る束に相当する) を作り, これを考察してある。ここでは [28], [29] に主として関係する部分をそれぞれ Part I, Part II とする。

本論にはいる前に次の準備をしておく。

§ 0. 束に関する諸概念

(i) 束 L が complete であるとは, L の任意個の元 a_α に対して l.u.b. $\bigcup_\alpha a_\alpha$ と g.l.b. $\bigcap_\alpha a_\alpha$ が存在することである。 $a_\delta \uparrow a$ ならば $a_\delta \cap b \uparrow a \cap b$ が成立つとき upper-continuous, $a_\delta \downarrow a$ ならば $a_\delta \cup b \downarrow a \cup b$ が成立つとき lower-continuous, 共に成立つとき continuous という。

(ii) $0, 1$ をもつ束 L で, $a \cup a' = 1, a \cap a' = 0$ のとき a' を a の complement といい, すべての元が complement をもつとき L は complemented であるという。 $a < b$ ならば sublattice $L(a, b) = \{x \in L; a \leq x \leq b\}$ がつねに complemented であるとき, L は relatively complemented であるという。 $0, 1$ をもつ束 L で dual-automorphism (order を逆にする) $a \rightarrow a^\perp$ が存在して, $a^{\perp\perp} = a$ で, a^\perp は a の complement であるとき, L は orthocomplemented であるといい, a^\perp を a の orthocomplement という。 $a \leq b^\perp$ のとき a と b は orthogonal

という。

(iii) 束 L の二元 a, b が次の性質をもつとき, modular pair を作るという $(a, b)M$ とかく。

$$c \leq b \text{ ならば } (c \cup a) \cap b = c \cup (a \cap b)$$

また次の性質をもつとき dual-modular pair を作るという $(a, b)M^*$ とかく。

$$c \leq a \text{ ならば } (a \cup b) \cap c = a \cup (b \cap c)$$

$(a, b)M$ ならば $(b, a)M$ が成立つとき, L は M -symmetric である ([19] では semi-modular) という。すべての a, b に対して $(a, b)M$ ならば, L は modular であるという。

(iv) 三元 a, b, c に対し

$$(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c) \text{ が成立つとき } (a, b, c)D \text{ とかき,}$$

$$(a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c) \text{ が成立つとき } (a, b, c)D^* \text{ とかく。}$$

すべての a, b, c に対しこの二つが成立つとき, L は distributive であるという。distributive かつ complemented のとき Boolean lattice という。

(v) $0, 1$ をもつ束 L が直積 $L_1 \times L_2$ と isomorph のとき, 元 $(1_1, 0_2)$ に対応する L の元を中心元という。その全体を中心という。 $0, 1$ は中心元とする。

L の元 z が中心元であるための必要条件は z が complement をもち z を含む D, D^* がすべて成立つことである。 L の中心は L の Boolean sublattice を作る。中心元が $0, 1$ だけのとき, L は irreducible であるという。

定理 (MacLaren [19]) 束 L が orthocomplemented のとき, L の元 z が中心であるための必要条件は, 任意の $a \in L$ に対して $(z, z^\perp, a)D$ が成立つことである。

(vi) $a < b$ で $a < x < b$ となる x が存在しないとき, b は a を cover するといい, $a < b$ とかく。 $0 < p$ なる元 p を atom という。すべての 0 でない元が atom を含むとき, L は atomic であるといい, $a < b$ ならばつねに $p \not\leq a, p \leq b$ なる atom p が存在するとき, L は relatively atomic

であるという。relatively atomic のときすべての元は atom のある集合の join となる。有限個の atom の join となる元を finite という。

(vii) p が atom で $p \not\leq a$ ならばつねに $a < a \cup p$ が成立つことを covering property という。これは atom p に対し $(p, a)M$ がつねに成立つことと同値である。更に L が relatively atomic のときは次のことと同値である。

$$a \cap b < a \text{ ならば } b < a \cup b.$$

relatively atomic な L が covering property をもつとき, finite な元 a の長さ n は $(0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n = a)$ unique に定まり, finite な元全体は L の ideal を作る。 p が atom のとき $(a, p)M$ はつねに成立つから, 束が M -symmetric ならば covering property をもつ。

(viii) orthocomplemented な束 L について次の命題はすべて同値であることが証明される。これが成立つとき L は orthomodular または relatively orthocomplemented である。

([16], [28] では weakly modular, [13] では quasimodular) という。

(α) $a \perp b$ ($a \leq b^\perp$) ならば $(a, b)M$.

(α') すべての a に対し $(a, a^\perp)M$.

(β) $a \leq b$ ならば $b = a \cup (b \cap a^\perp)$.

(β') $a \leq b$ ならば $a \perp c$, $a \cup c = b$ なる c が存在する。

(γ) $(a, a^\perp, b)D$ ならば $(b, b^\perp, a)D$. ([27] 参照)

(δ) $a < b$ ならば $x \rightarrow (a \cup x^\perp) \cap b$ は $L(a, b)$ における orthocomplementation である。

Part I

§ 1. system of propositions

ここで Piron [28] の本文の内容をまず紹介する。

physical system が与えられているとき, 測定の結果が yes or no で表現され

る、すなわち固有値が0と1だけの observable を proposition という。あらゆる測定は yes or no の型の測定の列でおきかえられるから、observable の研究を proposition の集まりの構造の研究に帰着させられる。その構造の研究に当つて Piron は Birkhoff と von Neumann [3] 以来の公理的方法によつた。二つの proposition a, b に対し、 a が yes であることが確かであるような測定では必ず b が yes であることも確かであるというときに $a \leq b$ とする。proposition 全体の集合 τ がこの order に関してみたすべき公理として、Piron があげたものを束論的に表わせば次のようになる。

Axiom O. τ は ordered set (partially) を作る。ここで $a \leq b$, $b \leq a$ となる二つの proposition a, b は同一と考える。

Axiom T. τ は complete lattice を作る。ここで $\bigcap_{\alpha} a_{\alpha}$ の測定の答は a_{α} の答がすべて yes のとき yes であり、その他のときは no であるとする。

$\bigcup_{\alpha} a_{\alpha}$ も同様。

Axiom C. τ は orthocomplemented である。ここで a と a^{\perp} は yes と no の答が丁度逆になるものである。

古典力学では proposition が相空間の部分集合に対応することから、更に分配率 D, D^* が成立ち、 τ は complete な Boolean lattice となる。

通常の量子論、すなわち observable をある Hilbert 空間 \mathcal{H} の作用素と考えるときは、proposition は射影作用素に対応し、したがつて \mathcal{H} の closed subspace に対応する。ここでもし \mathcal{H} が有限次元ならば、 τ では分配律より少し弱い modular 律 M, M^* が成立し、 τ は complete な orthocomplemented modular lattice となる。有限次元でないときは modular 律は必ずしも成立しないから、この場合も包含するように system の公理系を作ろうとするならば、modular より更に弱いものを考えねばならない。その一つが次の公理である。

Axiom P. $a \leq b$ ならば a と b が compatible である。すなわち、 a, b から meet と orthocomplementation によつて生成される τ の sublattice が Boolean sublattice になる。 a と b が compatible という条件は次の等式でも表わされる。 $a \cup (a^{\perp} \cap b) = b \cup (b^{\perp} \cap a)$ 。このとき $a \leftrightarrow b$ とかく。ところでこの公理は τ が orthomodular であることと同値になることが示されるから、これは modular より弱い。

以上の4つの公理 O. T. C. P. をみたす system τ を generalized system of propositions という。束論的にいえば、 τ は complete な orthomodular lattice である。

最後に次の公理を加える。

Axiom A. τ は atomic であり、さらに covering property をもつ。

atomic を仮定することについては多少問題があるが、Piron はこれを含めた5つの公理 O. T. C. P. A. をみたす system τ を system of propositions とよんだ。束論的にいえば complete な orthomodular, atomic lattice with covering property である。covering property は modular より弱く、Hilbert 空間の closed subspace 全体の作る束は、無限次元のときでも Axiom A をみたしているので、atomic の場合ではこの τ の構造は十分一般的である。なお、atomic と orthomodular から relatively atomic も出る。

Piron はこのような τ が適当な条件のもとで Hilbert 空間の closed subspace の作る束で表現されることを示し、量子論の Hilbert 空間との結びつきを正当化する一つの方法を示した。その内容は [28] の Appendix に詳述してあるが、大体次の三段階に分れる。(1) projective geometry への embedding (2) 既約分解 (3) ベクトル空間による表現。(さらに Piron は本文の終りで state を τ 上で定義された確率測度の形で定義し、 τ が Hilbert 空間を用いて表現された場合の state の形を定める問題について述べている。)

以下では、上記 (1), (2), (3) を主体とする問題を束論的興味から改良、補充して述べてみよう。簡単のために orthocomplemented, relatively atomic with covering property を以後 OAC-束と呼ぶことにする。system of propositions は complete, orthomodular な OAC-束であり、Hilbert space \mathcal{H} の closed subspace 全体の作る束 $L(\mathcal{H})$ は、さらに irreducible な例である。束論的にみて特筆すべきことは、以下 § 5 まで orthomodular の条件が殆ど必要ないことである。

§ 2. OAC-束における modular pair

補題 L を OAC-束とし、 $p, q \in L$ を atom とする。 $p \leq a \cup q$ なら

ば $p \leq r \cup q, r \leq a$ なる atom r が存在する。これはさらに q が finite 元であるときも成立する。

この補題は covering property とその dual な性質とによつて証明される。

次に

定理 2.1 L を OAC-束とする。

(i) L の 0 でない二元 a, b が $(a, b)M^*$ であるための必十条件は,
 $p \leq a \cup b$ なる atom p に対して二つの atom q, r で $p \leq q \cup r, q \leq a, r \leq b$ なるものが存在することである。よつて $(a, b)M^*$ と $(b, a)M^*$ は同値である。

(ii) L は M-symmetric である ($\because (a, b)M \Leftrightarrow (b^\perp, a^\perp)M^*$)

系 OAC-束が orthomodular になるための必十条件は、任意の 0 でない元 a をとるときすべての atom p に対して二つの atom q, r で $p \leq q \cup r, q \leq a, r \leq a^\perp$ なるものが存在することである。

注意 定理 2.1 の (ii) は orthocomplemented, relatively atomic lattice では covering property と M-symmetric が同値であることを示すが、これは geometric lattice の場合、すなわち upper-continuous, relatively atomic lattice でも同じことが成立つことと関連して重要な意味をもつ。

定理 2.2 OAC-束 L の finite な元 a に対しては、 $(a, b)M, (b, a)M, (a, b)M^*, (b, a)M^*$ がつねに成立つ。よつて finite な元全体は L の modular sublattice を作る。

注意 この定理より次のことがいえている。

a または a^\perp が finite \Rightarrow すべての $b \in L$ に対して $(a, b)M$ 。

しかるに $L = L(\mathcal{H})$ (Hilbert 空間 \mathcal{H} の closed subspace の束) のときは逆も成立つ ([11], Theorem 14)。

ところで L が finite (すなわち 1 が finite 元) のときは continuous であることも容易にわかるから、

定理 2.3 OAC-束 L が finite ならば continuous, atomic, complemented, modular lattice である。よつて次に述べる projective geometry の一種になる。

注 意 OAC-束 L の finite 元 a をとれば, sublattice $L(0, a)$ は $x \rightarrow x \wedge a$ によつて orthocomplemented である。

注 意 定理 2.1, 2.2, 2.3 は次のような束 L でも成立つ。 L とその dual がともに relatively atomic で covering property をもつ。

参考文献 [26]。(Piron [28] に出ている結果は定理 2.3 だけである。)

§ 3. OAC-束と projective geometry

定 義 点の集合 Ω において, 次の (1), (2) をみたす subset (二点以上を含む) として直線が定義されているとき, Ω を projective space という。

(1) p, q を異なる二点とすれば, p, q を含む直線がただ一つ存在する。これを直線 pq という。

(2) p, q, r を同一直線に含まれない三点とする。直線 pq 上に点 s , 直線 qr 上に点 t をとるとき ($s \neq t$), 直線 pr と直線 st は共通点をもつ。

さらに次の (3) をみたすとき, Ω は irreducible であるという。

(3) 直線は少なくとも三点を含む。

projective space Ω の subset S が次の性質をもつとき, linear であるという。

$p, q \in S$ ならば直線 pq は S に含まれる。

空集合および一点集合は linear とする。

定 理 3.1 Ω が projective space であるとき, Ω の linear subset 全体 $L(\Omega)$ は包含関係を順序として, upper-continuous, atomic, complemented, modular lattice を作る。これを Ω の上の (generalized) projective geometry とよぶ。 Ω が irreducible ならば $L(\Omega)$ も irreducible である。

注 意 (i) この定理で $L(\Omega)$ が modular になることが重要であるが, これは Ω の性質 (2) による。

(ii) Ω は irreducible な subspace に分割され, これにしたがつて $L(\Omega)$ も irreducible な projective geometry の直和に分解される。

定 理 3.2 (i) 0 をもつ modular な束の atom 全体を Ω とし, $p, q \in \Omega$ に対し $\{r \in \Omega; r \leq p \cup q\}$ を直線 pq と定義すれば, Ω は

projective space である。

(II) 束 L が upper-continuous, atomic, complemented, modular ならば, L の atom 全体から成る projective space Ω の上の projective geometry $L(\Omega)$ は L と isomorph である。

(III) L がさらに irreducible ならば Ω も irreducible である。

この定理と定理 2.2 とにより,

定理 3.3 OAC-束 L の atom 全体 Ω は projective space を作り, L から projective geometry $L(\Omega)$ の中への 1:1 な canonical injection α が存在する ($\alpha(a) = \{p \in \Omega; p \leq a\}$)
ここで α は次の性質をもつ。(1) $a \leq b \Rightarrow \alpha(a) \leq \alpha(b)$.
(2) $\alpha(\bigcap_{\beta} a_{\beta}) = \bigcap_{\beta} \alpha(a_{\beta})$. (3) a または a^{\perp} が finite.
のときは $\alpha(a \cup b) = \alpha(a) \cup \alpha(b)$.

注意 定理 2.1 の (i) は次のことを意味している。

$$(a, b)M^* \Leftrightarrow \alpha(a \cup b) = \alpha(a) \cup \alpha(b)$$

定義 定理 3.3 の $L(\Omega)$ を OAC-束 L の modular extension という。 $L = L(\mathcal{L})$ のときは, その modular extension は \mathcal{L} の sub-space (closed と限らない) 全体の作る束と一致する。

参考文献 projective space については, 例えば [21], Kap. III.

§ 4. 既約分解

0 をもつ束の二元 a, b に対し, $a \cup x = b \cup x, a \cap x = b \cap x = 0$ なる元 x が存在するとき a と b は perspective であるといい, $a \sim b$ とかく。

定理 4.1 OAC-束 L において

(i) 二つの異なる atom p, q が perspective であるための必十条件は p, q が第三の atom を含むことである。

(ii) p, q, r が atom で $p \sim q, q \sim r$ ならば $p \sim r$. よつて atom 全体は perspectivity によつて類別される。

補題 OAC-束において, p, q を異なる atom とすれば $(p \cup q) \cap q^{\perp}$ は atom である。よつて二つの atom が perspective でなければ orthogonal である。

この補題と § 0 の (V) の定理とにより,

補題 complete な OAC-束 L において atom を上のように類別し, 各類の atom の join を z_α とすれば, (i) $\bigcup_\alpha z_\alpha = 1$. (ii) $\alpha \neq \beta$ のとき $z_\alpha \perp z_\beta$. (iii) z_α は中心元である。

定理 4.2 complete な OAC-束 L は irreducible, complete な OAC-束 $L(0, z_\alpha)$ の直和に分解される。すなわち各元 $a \in L$ は $a = \bigcup_\alpha a_\alpha$, $a_\alpha \leq z_\alpha$ として unique に表わされる。

系 complete な OAC-束 L が irreducible であるための必要十分条件は任意の二つの atom が perspective すなわちその join が第三の atom を含むことである。よつて L が irreducible ならば, その modular extension も irreducible である。

参考文献 [23], [19]。

§ 5. vector space による表現

定理 5.1 field K (commutative と限らない) の上の vector space \mathcal{V} をとれば, \mathcal{V} の subspace 全体 $L(\mathcal{V})$ は包含関係を順序として irreducible な projective geometry すなわち upper-continuous, atomic complemented, modular lattice を作る。逆に irreducible な projective geometry は次元が 3 以上であれば, ある field K 上のある vector space \mathcal{V} の subspace 全体の作る束 $L(\mathcal{V})$ と isomorph である。([5], Part 3, Chap. VI または [1], Chap. VII)。

定義 field K が involutive な anti-automorphism $*$ をもち (以下 $*$ -operation という), K 上の vector space \mathcal{V} が hermitian form $f(x, y)$ をもつとする ($f: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$, f は sesquilinear, $f(y, x) = f(x, y)^*$, $f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$)。 \mathcal{V} の subset \mathcal{M} に対し, $\mathcal{M}^f = \{x \in \mathcal{V}; f(x, y) = 0 \text{ for all } y \in \mathcal{M}\}$ とおき $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{ff}$ となる subspace \mathcal{M} を f -closed subspace という。その全体を $L_f(\mathcal{V})$ とかく。

定理 5.2 (i) $L_f(\mathcal{V})$ は包含関係を順序として irreducible, complete な OAC-束を作る。ここで orthocomplementation は $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^f$

で与えられる。

(ii) $L_f(\mathcal{U})$ の modular extension は $L(\mathcal{U})$ である。特に \mathcal{U} が有限次元ならば $L_f(\mathcal{U}) = L(\mathcal{U})$ 。

さて (i) の逆の問題 (OAC-束の表現) を考えるために、

補題 field K 上の有限次元 (3次元以上) vector space \mathcal{U} において、もし $L(\mathcal{U})$ が orthocomplemented であるならば、 K は $*$ -operation をもち、 \mathcal{U} における hermitian form f が存在して、 f によつてこの orthocomplementation が与えられる。

この $*$ と f は次の意味で unique である。 ($*$, f) と ($\bar{*}$, \bar{f}) とが同じ orthocomplementation を与えるならば、 $r \in K (r \neq 0)$ が存在して $f(x, y) \equiv \bar{f}(x, y)r$, またすべての $\lambda \in K$ に対し $\lambda^* = r^{-1} \lambda \bar{*} r$ 。

([3] または [1], Chap IV 参照。)

定理 5.3 irreducible, complete な OAC-束 L の次元が3以上であるとき、 $*$ -operation をもつ field K 上の vector space \mathcal{U} とその上の hermitian form f が存在して L は $L_f(\mathcal{U})$ と isomorph である。

証明の要旨 L が irreducible で次元が3以上であるから、その modular extension $L(\Omega)$ も同様である。定理 5.1 によつて、ある field K 上の vector space \mathcal{U} があつて、 $L(\Omega)$ から $L(\mathcal{U})$ の上への isomorphism φ が存在する。有限の部分では $\alpha: L \rightarrow L(\Omega)$ は isomorphism であること (定理 3.3) と上の補題とを利用して、 K に $*$ -operation を与え、 \mathcal{U} 上に hermitian form f を作ることが出来る。(まず3次元 subspace を固定して、ここで $*$ と f を定め、その extension になるように f を定義する。) ここでさらに $\varphi(\alpha(L)) = L_f(\mathcal{U})$ となることが証明される。 ([28] 参照。)

これで OAC-束の表現論は出来上つたが、さらに orthomodular の場合について、

定理 5.4 \mathcal{U} が $f(x, y)$ を inner product として pre-Hilbert space であるとき、 \mathcal{U} が complete (すなわち Hilbert space) であるための必要条件是、 $L_f(\mathcal{U})$ が orthomodular であることである。

定理 5.3 と 5.4 を用いて

定理 5.5 irreducible, complete, orthomodular な OAC-

束 L の次元が3以上であるとする。定理 5.3 を適用したとき、もし field K が real, complex, quaternion のいずれかの field である (*は通常の conjugate) ならば、 L は Hilbert space の closed subspace 全体の作る束と isomorph である。

注 意 重要なのは定理 5.4 の十分性であるが、Piron が [28], Appendix の最後に書いている証明には誤りがあり、完全な証明は荒木氏によつて与えられた。ここでは、雨宮氏による少し簡単な証明の筋道を述べておく。

(i) $L_f(\mathcal{V})$ が orthomodular なることから、 \mathcal{M} が f -closed subspace ならば $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^f)M^*$ が成立ち、これより $\mathcal{V} = \mathcal{M} + \mathcal{M}^f$ である (定理 2.1 (i) 参照)。

(ii) \mathcal{V} の completion を \mathcal{L} とする。 \mathcal{L} の closed subspace \mathcal{L}_1 の codimension が有限ならば $\mathcal{V} \cap \mathcal{L}_1$ は \mathcal{L}_1 で稠密である。

(iii) $a, b \in \mathcal{L}$ が $a \perp b$ であるとき、(ii) より \mathcal{V} の元の列 $\{u_n\}, \{v_n\}$ で次の性質をもつものがとれる。(1) すべての n, m に対して $u_n \perp v_m, u_n \perp b, a \perp v_n$ 。(2) $u_n \rightarrow a, v_n \rightarrow b$ 。(u_1, v_1, u_2, v_2 の順に induction によつて作る。)

(iv) 任意の \mathcal{L} の元 a に対し、 \mathcal{V} の元 w で $a \perp w - a$ となるものがとれる。 $w - a = b$ とおき (iii) によつて $\{u_n\}, \{v_n\}$ をとる。 $\mathcal{M} = \{v_1, v_2, \dots\}^f$ とおき、 \mathcal{L} において $\overline{\mathcal{M}}$ への projection を P とする。 $v_n \perp \overline{\mathcal{M}}$ より $b \perp \overline{\mathcal{M}}$ 。また $u_n \in \mathcal{M}$ より $a \in \mathcal{M}$ 。よつて $Pw = a$ 。一方、(i) より $w = u + v$, $u \in \mathcal{M}, u \in \mathcal{M}^f$ とかける。このとき $v \perp \overline{\mathcal{M}}$ より $Pw = u$ 。従つて $a = u \in \mathcal{V}$ 。結局 $\mathcal{L} = \mathcal{V}$ が成立ち、 \mathcal{V} は complete である。

Part II

ここでは generalized system of propositions (Part I, §1) すなわち atomic を仮定しない complete orthomodular lattice について調べてみる。Part I でみたように、atomic の場合は covering property が大きな役割を果たして orthomodular は殆ど用いなかつた。しかし、non-atomic の場合は orthomodular の役割は重要である。また covering property は

atomic でないという意味がないことから，これに代るものとして定理 2.1 の後の注意により， M -symmetric の性質が考えられる。しかし， M -symmetric を活用した議論はまだあまり進んでいない。

§ 1. orthomodular lattice における commutativity

ここでは束 L は orthomodular とする。

定理 1.1 L において，4つの元 a, b, a^\perp, b^\perp の中から 3つをとって作つた 12種の D と 12種の D^* 計 24種の関係式はすべて互に同値である。これはまた Part I の § 1 で述べた $a \leftrightarrow b$ (compatible) と同値である。

束論では $a \leftrightarrow b$ のとき a と b は commutative であるといい，family $\{a_\alpha\}$ はその中のどの二元も互に commutative であるとき，commutative family という。

定理 1.2 (i) すべての α について $a_\alpha \leftrightarrow b$ ならば， $\bigcup_\alpha a_\alpha \leftrightarrow b$ ， $\bigcap_\alpha a_\alpha \leftrightarrow b$ で，

$$b \cap (\bigcup_\alpha a_\alpha) = \bigcup_\alpha (b \cap a_\alpha), \quad b \cup (\bigcap_\alpha a_\alpha) = \bigcap_\alpha (b \cup a_\alpha)$$

が成立つ。($\bigcup_\alpha a_\alpha, \bigcap_\alpha a_\alpha$ が存在するとき。)

(ii) $a \leftrightarrow b, a \leftrightarrow c$ のとき，三元の a, b, c についての D および D^* はすべて成立する。

定理 1.3 L の元 z が中心元であるための必十条件は z がすべての $a \in L$ と commutative であることである。

系 L が irreducible なるための必十条件は，すべての元と commutative になる元は $0, 1$ 以外に存在しないことである。

注意 $a \perp b$ なるための必十条件は $a \cap b = 0$ かつ $a \leftrightarrow b$ である。よつて orthogonal family は commutative family である。(atom の family については逆も成立つ。)

参考文献 [28] , Appendix ; [23] 。

§ 2. von Neumann algebra と von Neumann system

complete な orthomodular lattice の例としては，一つの von Neumann

algebra に属する projection 全体の作る束が代表的なものである。これを一般化して束論的に作る方法を Piron [29] が示した。ここではその方法について述べる。

定義 \mathcal{H} を Hilbert space, その上の bounded operator 全体の作る Banach $*$ -algebra を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする。 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の subset に対しその commutant を \mathcal{M}' とする。すなわち,

$$\mathcal{M}' = \{ B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) ; AB = BA \text{ for every } A \in \mathcal{M} \}$$

sub $*$ -algebra \mathcal{M} が $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ であるとき von Neumann algebra という。 $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ のとき, \mathcal{M}'' は \mathcal{M} から生成される von Neumann algebra である。

定義 L を orthomodular lattice とする。 L の subset に対しその commutant を S^0 とする。すなわち,

$$S^0 = \{ b \in L ; a \leftrightarrow b \text{ for every } a \in S \}$$

定理 1.2 より, S^0 は L の sublattice であり, 定理 1.3 より L の center を含む。 L が complete ならば S も complete である。 $T^{00} = T$ のとき, T を L の c -closed sublattice という。 S^{00} は S から生成される c -closed sublattice である。

定理 2.1 L が orthomodular lattice, T がその c -closed sublattice のとき,

- (i) T は orthomodular である。
- (ii) T の center は $T \cap T^0$ である。

定義 L が complete, orthomodular な OAC-束で, T がその c -closed sublattice のとき, pair (T, L) を von Neumann system という (Piron). (T は atomic と限らないが, covering property の代りに M -symmetric が成立つのではないかと思われる。)

Hilbert space \mathcal{H} の closed subspace の作る orthomodular lattice $L(\mathcal{H})$ で二元が commutative であることと, 対応する二つの projection が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で commutative であることは同値であることを用いて,

定理 2.2 Hilbert space \mathcal{H} 上の projection 全体 $P(\mathcal{H})$

は $L(\mathcal{H})$ と isomorph な orthomodular 束を作るが、その subset \mathcal{M} については $\mathcal{M}^{\circ\circ} = \mathcal{M} \vee P(\mathcal{H})$ 。よつて \mathcal{O} が von Neumann algebra であるとき $(\mathcal{O} \cap P(\mathcal{H}), P(\mathcal{H}))$ は von Neumann system である。

Piron [29] では von Neumann system の構造について考察を進めているが、いくつかの結果を列挙するに止まつて、定理といえる程のものは出ていない。ここではより具体的な $\mathcal{O} \cap P(\mathcal{H})$ について、これまで知られている主要結果を次にのべる。

§ 3. von Neumann algebra の projection lattice における同次元性

ここにのべることは \mathcal{O} が AW^* -algebra の場合にも拡張出来る。von Neumann algebra \mathcal{O} に属する projection 全体は、 $PQ = QP = P$ のとき $P \leq Q$ と定義することにより、complete, orthomodular lattice を作る。以下これを L とする。

定 義 $P, Q \in L$ に対し $P = W^*W, Q = WW^*$ なる $W \in \mathcal{O}$ が存在するとき $P \sim Q$ とかく。 $P \sim P_1 < Q$ のとき $P \prec Q$ とかく。

補 題 complete, orthomodular lattice においてその center は complete sublattice である。よつて各元 a に対しそれを含む最小の central element が存在するから、これを a の central envelope といい、 $e(a)$ とかく。

定 理 3.1 L において $P \sim Q$ のとき、 $P\mathcal{O}$ と $Q\mathcal{O}$ は right \mathcal{O} -module として isomorph であり、 $L(O, P)$ と $L(O, Q)$ は orthocomplemented lattice として isomorph である。また $e(P) = e(Q)$ である。

以下 “ \sim ” を同次元性として次元論が展開されるが、主な定理を一部あげれば、

定 理 3.2 $P \sim Q, Q \sim P$ ならば $P \sim Q$

定 理 3.3 任意の $P, Q \in L$ に対し

$$P - P \cap Q \sim P \cup Q - Q$$

定 理 3.4 任意の $P, Q \in L$ に対し $P = P_1 + P_2, Q = Q_1 + Q_2$ ($P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in L$) なる分解が存在して

$$P_1 \sim Q_1, \quad e(P_2) \cap e(Q_2) = 0$$

定理 3.5 $\{P_\alpha\}, \{Q_\alpha\}$ がそれぞれ orthogonal family で, すべての α に対して $P_\alpha \sim Q_\alpha$ ならば $\bigcup_\alpha P_\alpha \sim \bigcup_\alpha Q_\alpha$

定理 3.6 L が “ \sim ” に関して finite, すなわち $P \sim I$ ならば $P = I$ であるとき, L は continuous, complemented, modular lattice すなわち continuous geometry である。

注意 \mathcal{O} を一般化して Baer*-ring とした場合, 一般に定理 3.3 以下は証明できないが, もし定理 3.3 が成立つものと仮定すれば, それ以下次元論に関する定理はすべて成立つことがわかっている。

参考文献 [13], [24], [25] および第三回 Functional Analysis Symposium 報告 (1965), 1-19。

後記 von Neumann system (T, L) の束 T において, 何らかの方法で “ \sim ” に相当するものを定義して, 上に示したような次元論の定理を導くことは興味ある問題で, Piron [29] の後半にも若干その意図が表われている。この問題は束が modular のとき, すなわち complete, orthocomplemented, modular lattice については解決済みで, perspective をもとにして同次元性を与え, 結局次の Kaplansky の定理([14]) が証明されて continuous geometry に帰着される。

定理 complete, orthocomplemented, modular lattice は continuous geometry である。

modular でない complete, orthomodular lattice における次元論の研究は, 公理的方法によるものは [16] にはじまり, [25] の内容にも包含されているが, 少し具体的に perspective 等をもとにして同次元性を作る方向の研究は Holland, MacLauren 等によつて進められている ([10], [20])。

一方, 表現論としては Baer*-semigroup によるものが, Foulis [6] によつて示されているが, modular の場合に対応して考えると, さらに Baer*-ring 位で表現することが望まれる。

文 献

- (1) R. Baer, Linear algebra and projective geometry, New York, 1952.
- (2) G. Birkhoff, Lattice theory, New York, 1948.
- (3) G. Birkhoff and J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, Ann. of Math., 37 (1936), 823-843.
- (4) J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Paris, 1957.
- (5) M. L. Dubreil-Jacotin, L. Leisieur and R. Croisot, Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques, Paris, 1953.
- (6) D. J. Foulis, Baer $*$ -semigroups, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), 648-654.
- (7) ———, Conditions for the modularlity of an orthomodular lattices, Pacific J. Math., 11 (1961), 889-895.
- (8) ———, A note on orthomodular lattices, Portugal Math., 21 (1962), 65-72.

- (9) S. S. Holland, Jr., A Radon-Nikodym theorem in dimension lattices, Trans. Amer. Math. Soc., 108 (1963), 66-87.
- (10) _____, Distributivity and perspectivity in orthomodular lattices, *ibid.*, 112 (1964), 330-343.
- (11) M. F. Janowitz, Quantifiers and orthomodular lattices, Pacific J. Math., 13 (1963), 1241-1249.
- (12) F. Kamber, Zweiwertige Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf orthokomplementären Verbands, Math. Ann., 158 (1965), 158-196.
- (13) I. Kaplansky, Projections in Banach algebras, Ann. of Math., 53 (1951), 235-249.
- (14) _____, Any orthocomplemented complete modular lattice is a continuous geometry, Ann. of Math., 61 (1955), 524-541.
- (15) _____, Rings of operators, Univ. of Chicago, 1955.
- (16) L. H. Loomis, The lattice theoretic background of the dimension theory of operator algebras, Memoirs of Amer. Math. Soc., No. 18, 1955.
- (17) G. W. Mackey, On infinite dimensional linear spaces,

- Trans. Amer. Math. Soc., 57 (1945),
155-207.
- (18) _____, Quantum mechanics and Hilbert space,
Amer. Math. Monthly, 64 (1957), 45-57.
- (19) M. D. MacLaren, Atomic orthocomplemented lattices,
Pacific J. Math., 14 (1964), 597-612.
- (20) _____, Nearly modular orthocomplemented
lattices, Trans. Amer. Math. Soc.,
114(1965), 401-416.
- (21) F. Maeda, Kontinuerliche Geometrien, Berlin, 1958.
- (22) _____, Decomposition of general lattices into
direct summands of types I, II and J. Sci.
Hiroshima Univ., 23 (1959), 151-170.
- (23) _____, Theory of symmetric lattices (Lecture note),
1965.
- (24) S. Maeda, On the lattice of projections of a Bare
*-ring, J. Sci. Hiroshima Univ., 22(1958),
75-88.
- (25) _____, Dimension theory on relatively semi-
orthocomplemented complete lattices, *ibid.*,
25(1961), 369-404.
- (26) _____, On the symmetry of the modular relation in
atomic lattices, *ibid.*, 29 (1965)(to appear).
- (27) M. Nakamura, The permutability in a certain

- orthocomplemented lattice, Kodai Math.
Sem. Reports, 9 (1957), 158-160.
- (28) C. Piron, Axiomatique quantique, Helv. Phys. Acta,
37 (1964), 439-468.
- (29) _____, Les systèmes de von Neumann, manuscript.
- (30) U. Sasaki, Orthocomplemented lattices, satisfying
the exchange axiom, J. Sci. Hiroshima
Univ., 17 (1954), 293-302.